Задачи на выпуклые мн-ва и функции

1. Доказать строгую выпуклость ф-ии $f(x) = x^2$, не используя условия $f''(x) > 0$.

Пусть $x' \neq x''$, $\lambda \in (0,1)$. Тогда нужно доказать нер-во

$$(\lambda x' + (1-\lambda) x'')^2 < \lambda (x')^2 + (1-\lambda)(x'')^2$$ или

$$\lambda^2 (x')^2 + 2\lambda(1-\lambda) x' x'' + (1-\lambda)^2 (x'')^2 < \lambda (x')^2 + (1-\lambda)(x'')^2$$ или

$$0 < \lambda(1-\lambda)(x')^2 - 2\lambda(1-\lambda) x' x'' + \lambda(1-\lambda)(x'')^2 =$$

$$= \lambda(1-\lambda)(x' - x'')^2$$ ч.т.д.

2. Пусть $|x| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$ - евклидова норма в E^n.

Тогда $|x|$ - выпуклая ф-я.

$$|\lambda x' + (1-\lambda) x''| \le |\lambda x'| + |(1-\lambda) x''| =$$

$$= \lambda |x'| + (1-\lambda)|x''|.$$

Является ли ф-я $f(x) = |x|$ строго выпуклой?

Нет. $x'' = kx'$

3. $f(x)$, $g(x)$ выпуклые. Доказать, что $f(x) + g(x)$ выпуклая. Если $g(x)$ - строго вып., то $f(x) + g(x)$ - строго вып.

Докажем, что $h(x) = \max[f(x), g(x)]$ - выпуклая. Действительно

$$h(\lambda x' + (1-\lambda) x'') = \max[f(\lambda x' + (1-\lambda) x''), g(\lambda x' + (1-\lambda) x'')] \le$$

$$\le \max[\lambda f(x') + (1-\lambda) f(x''), \lambda g(x') + (1-\lambda) g(x'')] \le$$

$\le \max[\lambda f(x'), \lambda g(x')] + \max[(1-\lambda) f(x''), (1-\lambda) g(x'')] =$

$= \lambda h(x') + (1-\lambda) h(x'')$.

4. При каких α функция $f(x) = x^\alpha$ выпуклая, вогнутая, линейная. Здесь $x > 0$.

5. Пусть $f(x), g(x)$ - неотрицательные, возрастающие и выпуклые ф-ии. Тогда $f(x)g(x)$ выпуклая. Доказать, что $(f(x)g(x))'' \ge 0$.

6. Пусть $f(x)$ - возрастающая, выпуклая и дважды дифференцируемая функция. Тогда

$g(x) = f(x^2)$ выпуклая. Действительно,

$g'(x) = 2x f'(x^2)$, $g''(x) = 2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2) \geq 0$

7. Пусть $f(x)$ – неотрицательная вогнутая функция. Тогда $g(x)=\sqrt{f(x)}$ – вогнутая

$$g(\lambda x' + (1-\lambda) x'') = \sqrt{f(\lambda x' + (1-\lambda) x'')} \geq$$

$$\geq \sqrt{\lambda f(x') + (1-\lambda) f(x'')} \geq \lambda \sqrt{f(x')} + (1-\lambda)\sqrt{f(x'')} =$$

$$= \lambda g(x') + (1-\lambda) g(x'').$$ Здесь использована строгая вогнутость $\sqrt{x}$. Неравенство применили для точек $y' = g(x')$ и $y'' = g(x'')$

8. Функция $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ не выпуклая, ни вогнута. Пример. Если $x_1 = x_2$, то x_1^2 – выпуклая, если

$x_2 = 1 - x_1$, то $x_1(1-x_1)$ – вогнутая по x_1.